

Correction Feuille Exercice 21

Étudier la régularité d'une fonction

Exercice 7 (*)

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. On étudie le signe de $\frac{e^x - 1}{x}$. On a

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Ainsi, à l'aide d'un tableau de signe, on a

| | | | |
|------------------------------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| Signe de $e^x - 1$ | - | 0 | + |
| Signe de x | - | 0 | + |
| Signe de $\frac{e^x - 1}{x}$ | + | + | + |

- La fonction $x \rightarrow e^x - 1$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
- La fonction $x \rightarrow x$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
- La fonction f est donc continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en tant que quotient et composée de fonctions continue.

On étudie maintenant la continuité en 0. Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{par taux d'accroissement}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

La fonction f est donc continue en 0.

Par conséquent, elle est continue sur \mathbb{R} .

2. De la même façon que précédemment

- La fonction $x \rightarrow e^x - 1$ est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
- La fonction $x \rightarrow x$ est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
- La fonction f est donc \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en tant que quotient et composée de fonctions continue.

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}.$$

3. (Attention la suite de l'exercice n'est pas au programme de première année). On utilise un développement limité à l'ordre 2 de e^x en 0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)) - (1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)) + 1}{x(1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)) - 1} \\ &= \frac{x + x^2 + x^3/2 + x^3\varepsilon(x) - x - x^2/2 - x^2\varepsilon(x)}{x(x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x))} \\ &= \frac{x^2/2 + x^3/2 - x^2\varepsilon(x) + x^3\varepsilon(x)}{x^2(1 + x/2 + x\varepsilon(x))} \\ &= \frac{1/2 + x/2 - \varepsilon(x) + x\varepsilon(x)}{1 + x/2 + x\varepsilon(x)} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} - \varepsilon(x) + x\varepsilon(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} + x\varepsilon(x) = 0$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

1. On Montre par récurrence les propositions

$$\mathcal{P}_n = \left\{ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right\}$$

Initialisation : Nous avons f continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{(0)}(x) = \frac{(-1)^0 0!}{(x+1)^{0+1}} = \frac{1}{x+1}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang n . La fonction $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^{n+1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc la fonction f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On dérive alors la fonction $f^{(n)}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{-(-1)^n n! (n+1)(x+1)^n}{(x+1)^{2(n+1)}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x+1)^{2n+2-n}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x+1)^{n+2}} \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie donc (\mathcal{P}_n) est héréditaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

2. La fonction f est dérivable sur $] - 1; +\infty[$ et

$$\forall x \in] - 1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

En utilisant la question précédente, f est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] - 1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+1)^n}$$

Étudier la convexité des fonctions

Exercice 9

Étudier la concavité des fonctions :

- On étudie la fonction $f : x \rightarrow e^{\frac{1}{x}}$.
 - La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
 - La fonction $x \rightarrow e^{1/x}$ est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonction de classe \mathcal{C}^2 .

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) &= \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

On résout l'inéquation $2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$. Ainsi $f''(x) > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$.

La fonction f est concave sur $] - \infty, -1/2[$ et elle est convexe sur $] - 1/2, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

- On étudie la fonction $g : x \rightarrow (x+1)^{x+1} = e^{(x+1)\ln(x+1)}$.
 - La fonction $x \rightarrow x+1$ est strictement positive et de classe \mathcal{C}^2 sur $] - 1; +\infty[$
 - La fonction $x \rightarrow \ln(x+1)$ est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $] - 1; +\infty[$
 - La fonction g est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $] - 1, +\infty[$ en tant que composée de fonction de classe \mathcal{C}^2 .

On a

$$\forall x \in] - 1, +\infty[, f'(x) = (\ln(x+1) + 1)e^{(x+1)\ln(x+1)}$$

et

$$\forall x \in] - 1, +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x+1} e^{(x+1)\ln(x+1)} + (\ln(x+1) + 1)^2 e^{(x+1)\ln(x+1)}$$

Or $\frac{1}{x+1} > 0$, $e^{(x+1)\ln(x+1)} > 0$ et $(\ln(x+1)+1)^2 > 0$ donc la fonction f est convexe sur $] - 1, +\infty[$.

Exercice 10 (*)

On montre le caractère \mathcal{C}^2 de la fonction.

- La fonction $x \rightarrow (x-1)^3$ est \mathcal{C}^2 sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ et ne s'annule pas sur ces intervalles.
- La fonction $x \rightarrow x^2(x-3)$ est \mathcal{C}^2 sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$
- La fonction f est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) &= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2 x^2 (x-3)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3x(x-2)(x-1)^3 - 3(x-1)^2 x^2 (x-3)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3x(x-1)^2 ((x-2)(x-1) - x(x-3))}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3x(x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{6x}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Puis on calcule

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f''(x) &= \frac{6(x-1)^4 - 24x(x-1)^3}{(x-1)^8} \\ &= \frac{(x-1)^3(6(x-1) - 24x)}{(x-1)^8} \\ &= \frac{6x - 6 - 24x}{(x-1)^5} \\ &= \frac{-18x - 6}{(x-1)^5} \end{aligned}$$

On résout l'équation $-18x - 6 = 0 \iff x = -1/3$. On détermine le tableau de signe de f'' .

| x | $-\infty$ | $-1/3$ | 1 | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|--------|-----|-----------|
| Signe de $-18x - 6$ | + | 0 | - | - |
| Signe de $(x-1)^5$ | - | - | 0 | + |
| Signe de $f''(x)$ | - | 0 | + | - |

En $x = -1/3$, la dérivée seconde de la fonction s'annule en changeant de signe.

Le point de la courbe d'abscisse $-1/3$ est un point d'inflexion.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. On a

- La fonction $x \rightarrow e^x + 1$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et ne s'annule pas.
- La fonction $x \rightarrow e^x - 1$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

Donc, par quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ,

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$.

2. La fonction f est strictement croissante et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1.$$

D'où le tableau de variation correspondant :

| | | |
|-------------------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Signe de $f'(x)$ | + | |
| Variations de f | -1 | 1 |

3. De même que pour la première question,

— La fonction $x \rightarrow e^x + 1$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et ne s'annule pas.

— La fonction $x \rightarrow e^x - 1$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}

Donc par quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ,

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

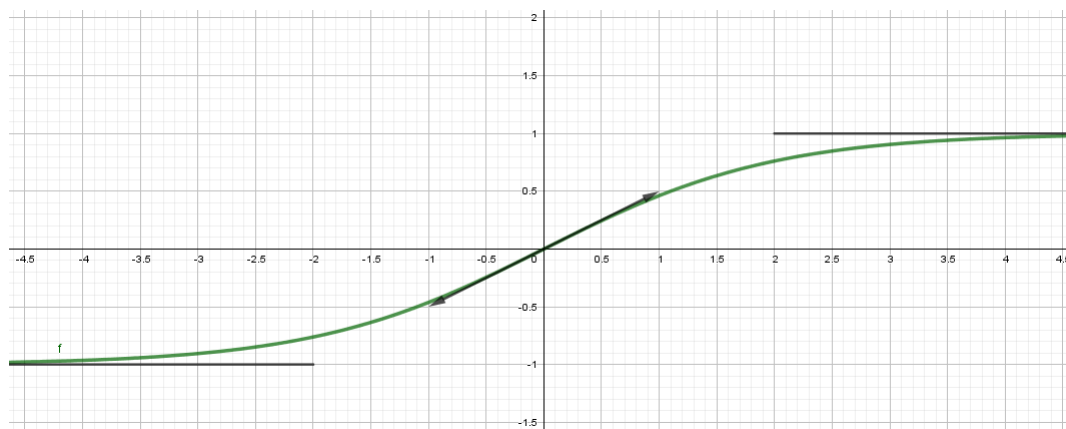
et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 2e^x \times 2e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{2e^x(e^x + 1) - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \\ &= \frac{2e^{2x} + 2e^x - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \\ &= \frac{2e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{2e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \end{aligned}$$

Comme $1 - e^x > 0 \iff x < 0$,

la fonction f est convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ .

4. Tracer dans un repère orthonormé \mathcal{C}_f , ainsi que la tangente au point d'inflexion.



🍷 Sujets de concours

Exercice 12 (EML 2012)

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})
 - (a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.
 - (b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.
 - (c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ .
 - (d) Tracer l'allure de Γ . On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

Exercice 13 (EML 2014)

1. La fonction $x \mapsto x$ est C^∞ sur $I =]0; +\infty[$, $x \mapsto e^x$ est C^∞ sur \mathbb{R} . Par composée et somme, φ est C^∞ et a fortiori C^3 sur I . $\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^x - 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2} \\ &= e^x + \left(-1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= e^x + \left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} + \left(-1 + \frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^x - \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'''(x) &= e^x - \frac{-3}{x^4}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3}\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

2. Pour $x > 0, e^x > 0, \frac{3x+1}{x^5} > 0, e^{\frac{1}{x}}$ donc $\varphi''' > 0$ sur $]0; +\infty[$. φ'' est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\varphi''(1) = 0$

Donc $\varphi'' < 0$ sur $]0; 1[$ et $\varphi'' > 0$ sur $]1; +\infty[$

D'où φ' est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$. φ' atteint son maximum en 1 qui est : $\varphi'(1) = e > 0$

Donc $\varphi \geq e > 0$ sur $]0; +\infty[$

3. Avec le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on détermine les limites de $xe^{\frac{1}{x}}$ puis de φ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad \text{croissance comparée}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, $\varphi(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} e^{\frac{1}{x}}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

4. On sait que $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$. Soit $x \geq 3$. φ est de classe C^1 sur $[3; x]$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\varphi(x) - \varphi(3) \leq e(x - 3)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \leq ex + \varphi(3) - 3e$$

Or $\varphi(3) > 15$ et $3e < 9$, donc $\varphi(3) - 3e > 6 > 0$ et

$$\varphi(x) \leq ex$$

6. φ'' s'annule et change de signe en 1.

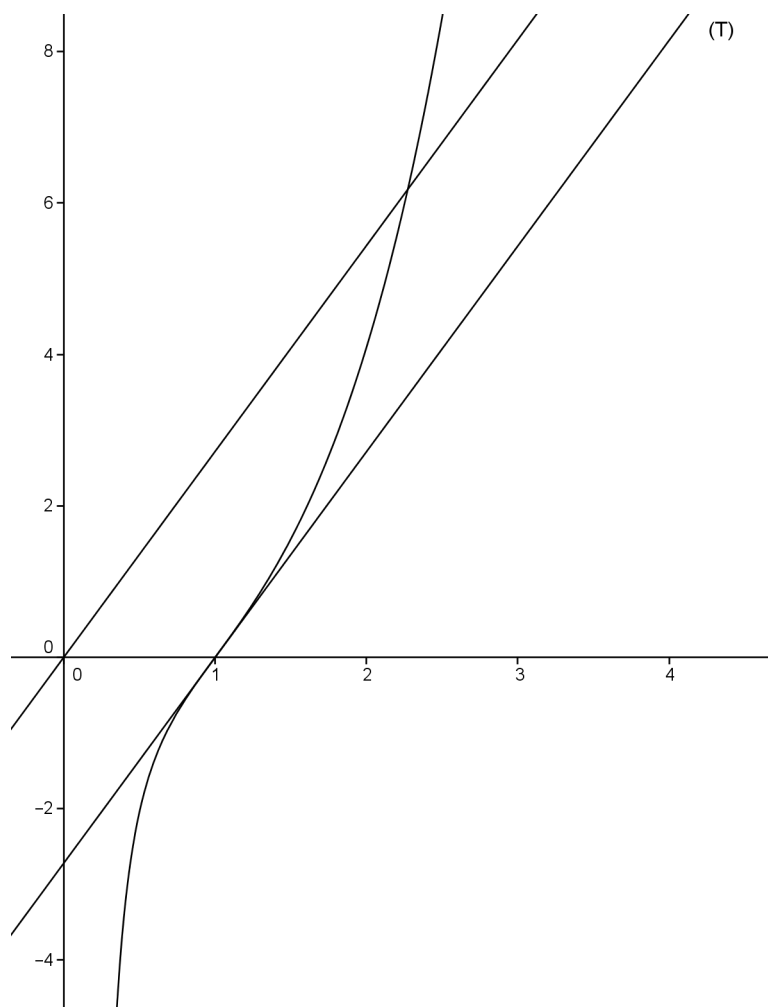
$$\text{Donc } \mathcal{C} \text{ admet un point d'inflexion en } x = 1 \quad \varphi(1) = 0$$

Le point d'inflexion a pour coordonnées $(1; 0)$. Enfin $\varphi'(1) = e$

$$\text{Donc la tangente a pour équation } y = \varphi'(1)(x - 1) + \varphi(1) = e(x - 1)$$

7. On récapitule les résultats dans un tableau de variation

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------------------------|---|---|-----------|
| Signe de $\varphi'''(x)$ | + | 0 | + |
| Variations de φ'' | | | |
| Signe de $\varphi''(x)$ | - | 0 | + |
| Variations de φ' | | | |
| Signe de $\varphi'(x)$ | + | 0 | + |
| Variations de φ | | | |



Exercice 14 (ECRICOME 2006)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

Étude de f .

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 1 + 2e^x > 0$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

2. On a $f(-2) = -1 + e^{-2} < 0$ car $-2 < 0$ donc $e^{-2} < e^0$ et $f(-1) = 0 + 2e^{-1} > 0$. On applique alors le théorème de bijection :

— f est continue et strictement croissante sur $[-2, -1]$

— De plus, $0 \in [f(-2), f(-1)]$

Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur cet intervalle.

il existe un unique $\alpha \in [-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

N.B. qui n'était pas demandé mais qui va servir : comme f est strictement croissante, elle est strictement négative avant α et strictement positive après.

α est donc la seule solution sur \mathbb{R} de $f(x) = 0$

Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $f''(x) = 2e^x > 0$

Donc f est convexe sur \mathbb{R}

Il y a alors deux méthodes.

Géométriquement : Comme f est convexe, la tangente en x est en dessous de la courbe représentative. Cette tangente a pour équation au point x

$$y = (t - x) f'(x) + f(x)$$

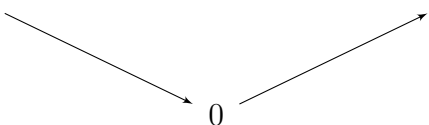
.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + (t - x) f'(x) \leq f(t)$$

Analytiquement : On étudie les variations de la différence :

$h(t) = f(t) - f(x) - (t - x) f'(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(t) = f'(t) - f'(x)$ et comme f' est strictement croissante sur \mathbb{R}

| | | | |
|-------------------|--|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | x | $+\infty$ |
| Signe de $h'(t)$ | - | 0 | + |
| Variations de h |  | | |

Donc $h(t) \geq 0$ et

$$\boxed{f(x) + (t-x)f'(x) \leq f(t)}$$

2. On utilise l'inégalité précédente avec u_n et α ... Qui est qui ?
 dans u_{n+1} on retrouve $f'(u_n)$. Donc en posant, $x = u_n$ et $t = \alpha$, on a

$$\begin{aligned} f(u_n) - (\alpha - u_n)f'(u_n) &\leq f(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow f(u_n) &\leq (\alpha - u_n)f'(u_n) \\ \Leftrightarrow \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} &\leq \alpha - u_n \\ \Leftrightarrow u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} &\geq \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}}$$

Comme f est croissante sur \mathbb{R} et que $f(\alpha) = 0$, sr $[\alpha, +\infty[$ on a $f(x) \geq 0$

Comme $u_n \geq \alpha$ pour $n \geq 1$ et également pour $n = 0$, ($-1 \geq \alpha$)

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } u \text{ est décroissante}}$

Enfin, comme la suite est décroissante, on a pour tout entier n : $u_0 \geq u_n$ et finalement :

Conclusion : $\boxed{\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1}$

3. La suite u est décroissante et minorée par α .

Elle converge donc vers une limite $\ell \geq \alpha$.

Comme $x \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est continue sur \mathbb{R} ($f'(x) \neq 0$), elle est continue en ℓ et donc $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$

Donc $f(\ell) = 0$ et $\ell = \alpha$

Conclusion : $\boxed{u_n \rightarrow \alpha \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$

4. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-2, -1]$:

$$0 \leq (x - \alpha)f'(x) - f(x) \leq \frac{(x - \alpha)^2}{e}$$

- (a) Comme $u_n \in [-2, -1]$, l'inégalité précédente donne :

$$0 \leq (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

et en divisant par $f'(u_n) > 0$:

$$0 \leq u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{f'(u_n)e}$$

Enfin, $f'(x) = 1 + 2e^x \geq 1$ donc $\frac{1}{f'(u_n)} \leq 1$ et en multipliant par $\frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \geq 0$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}}$

- (b) On procède alors par récurrence :

— $\frac{1}{e^{2^0-1}} = \frac{1}{e^0} = 1$ et comme $-2 \leq \alpha \leq -1$ alors $0 \leq -1 - \alpha \leq 1$

Donc $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^0-1}}$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$

alors $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \frac{1}{e} \left(\frac{1}{e^{2^n-1}} \right)^2 = \frac{1}{e^{2 \cdot 2^n - 2 + 1}} = \frac{1}{e^{2^{(n+1)}-1}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$

5. Comme $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$, alors u_n donne une valeur approchée de α à $\frac{1}{e^{2^n-1}}$ près.

Il faut donc calculer les valeurs de u_n jusqu'à ce que $\frac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p}$

On peut calculer séparément la valeur de 10^{-p} et celle de $\frac{1}{e^{2^n-1}}$ dans la boucle, ou résoudre cette inégalité :

$$\frac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p} \iff -2^n + 1 \leq -p \ln(10) \iff 2^n \geq p \ln(10) + 1$$

$$\iff n \geq \ln(p \ln(10) + 1) / \ln(2) \text{ car } \ln(2) \text{ par lequel on divise est positif}$$

$$\iff n \geq \lceil \ln(p \ln(10) + 1) / \ln(2) \rceil + 1$$

D'où le programme :

```
function y = f(x)
    y = x + 1 + 2*exp(x)
endfunction
```

```
function y = fp(x)
    y = 1 + 2*exp(x)
endfunction
```

```
u = -1
n = ceil(log(p*log(10) + 1)/log(2))
for k = 1:n
    u = u - f(u)/fp(u)
end
disp(u)
```